

“Análisis Asintótico de la Interacción de Ondas Largas Lineales Sobre dos Placas Sumergidas de Paredes Onduladas”

D. Azuara, E. Bautista, F. Mendez

^{a,b}*Instituto Politécnico Nacional, SEPI ESIME Azcapotzalco, Av. de las Granjas No. 682, Col. Santa Catarina, Del. Azcapotzalco, México, D.F. 02250, Mexico.*

**E-mail address: dulceazuara@outlook.es.*

RESUMEN

Este trabajo presenta un análisis asintótico, hasta el segundo orden en una expansión regular de la interacción de ondas largas lineales con dos configuraciones 1. Dos placas planas sumergidas, impermeables y fijas 2. Dos placas de superficies onduladas sumergidas, impermeables y fijas. Las placas están separadas por una región intermedia. Las superficies onduladas se describen mediante perfiles sinusoidales. Se analizan los efectos de tres parámetros geométricos diferentes: la amplitud de las superficies onduladas, la longitud y el ancho de la estructura, en los coeficientes de reflexión y transmisión. También se determinan las fuerzas hidrodinámicas sobre la estructura. Las ecuaciones de gobierno se expresan en forma adimensional. Usando el método de perturbación de dominio, las superficies con ondulaciones pequeñas de las placas se linealizan. La solución asintótica se compara con las soluciones teóricas que se han descrito en la literatura especializada y con una solución numérica.

ABSTRACT

This work presents an asymptotic analysis, up to the second order in a regular expansion, of the interaction of linear long waves with two configurations 1. Two flat plates impermeables, fixed, submerged 2. two wavy plates impermeables, fixed, submerged. Below the floating plates, there is also a step with a wavy surface. The undulating surfaces are described by sinusoidal profiles. The effects of three different geometric parameters: the amplitude of the wavy surfaces and the submerged length and width of the structure on the reflection and transmission coefficients are analyzed. The hydrodynamic forces are also determined. The governing equations are expressed in dimensionless form. Using the domain perturbation method, the small wavy surfaces of the plates are linearized. The asymptotic solution is compared with the theoretical solutions that have been reported in the specialized literature and with a numerical solution.

“Análisis Asintótico de la Interacción de Ondas Largas Lineales Sobre dos Placas Sumergidas de Paredes Onduladas”

RESUMEN

Este trabajo presenta un análisis asintótico, hasta el segundo orden en una expansión regular de la interacción de ondas largas lineales con dos configuraciones 1. Dos placas planas sumergidas, impermeables y fijas 2. Dos placas de superficies onduladas sumergidas, impermeables y fijas. Las placas están separadas por una región intermedia. Las superficies onduladas se describen mediante perfiles sinusoidales. Se analizan los efectos de tres parámetros geométricos diferentes: la amplitud de las superficies onduladas, la longitud y el ancho de la estructura, en los coeficientes de reflexión y transmisión. También se determinan las fuerzas hidrodinámicas sobre la estructura. Las ecuaciones de gobierno se expresan en forma adimensional. Usando el método de perturbación de dominio, las superficies con ondulaciones pequeñas de las placas se linealizan. La solución asintótica se compara con las soluciones teóricas que se han descrito en la literatura especializada y con una solución numérica.

Palabras Clave: análisis asintótico, expansión regular, fuerzas hidrodinámicas, método de perturbación de dominio .

ABSTRACT

This work presents an asymptotic analysis, up to the second order in a regular expansion, of the interaction of linear long waves with two configurations 1. Two flat plates impermeables, fixed, submerged 2. two wavy plates impermeables, fixed, submerged. Below the floating plates, there is also a step with a wavy surface. The undulating surfaces are described by sinusoidal profiles. The effects of three different geometric parameters: the amplitude of the wavy surfaces and the submerged length and width of the structure on the reflection and transmission coefficients are analyzed. The hydrodynamic forces are also determined. The governing equations are expressed in dimensionless form. Using the domain perturbation method, the small wavy surfaces of the plates are linearized. The asymptotic solution is compared with the theoretical solutions that have been reported in the specialized literature and with a numerical solution.

Keywords: Asymptotic analysis, regular expansion, hydrodynamic forces, domain perturbation method.

1. Introducción

En el mar y en los grandes lagos, el oleaje se genera principalmente por el viento, el cual viaja hacia las regiones costeras afectando la hidrodinámica regional y produciendo fuertes impactos físicos, geológicos y ambientales en las humanas en las áreas costeras.

La comprensión hidrodinámica del oleaje en puertos y regiones costeras ha sido y es una parte importante de los estudios oceanográficos. Particularmente, es valiosa en la práctica de la ingeniería costera en áreas como la protección de litorales, erosión de playas, seguridad de navegación, mantenimiento de canales, planificación y gestión de puertos, y en el diseño de rompeolas y muelles. Una predicción precisa de los efectos hidrodinámicos debido a la interacción del oleaje con estructuras marítimas es necesaria en el diseño, protección y operación de dichas estructuras. Con la finalidad de satisfacer los requerimientos anteriores, en los últimos años se han propuesto una gran variedad de estructuras disipadoras de energía, también conocidas como rompeolas, las cuales contribuyen a modificar la mecánica del oleaje, brindando protección a las zonas costeras [1]. Generalmente, los rompeolas se dividen en dos grupos: los que atenúan la energía del oleaje y los que bloquean totalmente el flujo del oleaje hacia la costa. Los primeros, a su vez, se dividen en rompeolas. sumergidos, flotantes, neumáticos e hidráulicos.

Los rompeolas tradicionales, por ejemplo, en talud, verticales y compuestos, frecuentemente se emplazan en regiones marítimas de grandes profundidades de agua y son capaces de disipar la energía del oleaje con contenido energético alto; sin

embargo, son muy costosos [2]. Por lo tanto, es necesario considerar estructuras rentables y además ambientalmente amigables para atenuar el oleaje incidente.

Hoy en día, las estructuras rompeolas sumergidas se utilizan cada vez con mayor frecuencia para proteger puertos, costas y playas de la acción del oleaje. Estas estructuras tienen ventajas sobre las anteriores porque son menos costosas, su impacto visual es pequeño y su influencia en el medio ambiente es mínimo.

Los rompeolas flotantes favorecen la calidad del agua en la región de protección, ya que permite el libre intercambio del agua a través de las estructuras. Adicionalmente, éstas constituyen una alternativa para la conservación de playas sin provocar problemas de erosión.

1.1. Antecedentes

Aunque en años recientes cada vez más estudios se enfocan hacia el análisis no-lineal de la hidrodinámica del oleaje, los resultados analíticos lineales son todavía requeridos al ser un punto de referencia. Por otra parte, una de las principales dificultades para obtener una solución analítica de su hidrodinámica, se localiza en analizar geometrías complicadas que se encuentran en la práctica, sin embargo, para algunas geometrías simplificadas es posible determinar una solución analítica aproximada.

En la literatura especializada se encuentran investigaciones clásicas que han abordado de diversas maneras la dispersión bidimensional de ondas debido a distintos tipos de estructuras rígidas, ver por ejemplo [3–5]. En este contexto, Lamb [6] fue uno de los pioneros en desarrollar una solución analítica de la interacción entre ondas superficiales y obstáculos sumergidos, él analizó la hidrodinámica de ondas largas que se propagan sobre un escalón finito y obtuvo expresiones para el coeficiente de reflexión y transmisión del oleaje. Black et al. [7] aplicaron la formulación variacional de Schwinger a la radiación de ondas superficiales debidas a pequeñas oscilaciones de cilindros circulares y rectangulares y, por medio del teorema de Haskind, obtuvieron las fuerzas del oleaje debidas a una onda incidente plana. Kirby et al. [8] analizaron la difracción de ondas superficiales incidiendo oblicuamente sobre una trinchera asimétrica usando teoría lineal. Drimer et al. [9] presentaron un modelo analítico simplificado de la interacción del oleaje con rompeolas rectangulares flotantes, en profundidades finitas. Williams [10], usando las teorías lineal del oleaje y de Froude-Krylov, analizó las fuerzas que actúan sobre un cuerpo sujeto a dos condiciones de posición: cerca de la superficie libre del agua y emplazado en el fondo marino. Con base en el método de elementos de frontera (BEM por sus siglas en inglés), Desde el estudio pionero de Heins [11] sobre la dispersión del oleaje generada por una placa semi-infinita, horizontal y sumergida y la investigación por Stoker [12] de los coeficientes de reflexión y transmisión de ondas largas, en los últimos años se han realizado estudios para obtener condiciones geométricas óptimas que permitan una máxima reflexión del oleaje. Siew y Hurley [13] emplearon un método de expansiones asintóticas acopladas para resolver el problema de una placa horizontal sumergida en aguas someras. Una de las técnicas que con mayor frecuencia se usa en el estudio de la interacción del oleaje con estructuras sumergidas, es la de expansión de funciones características, la cual se ha implementado para el análisis de placas planas, Usha y Gayathri [14,15], y rompeolas de espesor finito. En este contexto, Abul- Azm [16] usó esta técnica para la solución de oleaje oblicuo incidente sobre un rompeolas infinitamente largo, sumergido y vertical, posteriormente, Abul-Azm presentó una solución analítica para rompeolas sumergidos. Wu et al. [17] extendieron el método de acoplamiento de expansión de funciones características para analizar la respuesta al oleaje inducido de una placa elástica flotante. Cheong et al. [18] ampliaron el método de expansión de valores característicos para analizar una plataforma rompeolas sumergida. Usando el método de elemento finito, Nallayarasu et al. [19] analizaron el problema de la difracción del oleaje por una placa fija, inclinada y sumergida. Yang et al. [20] usaron el método de expansión de valores característicos para analizar la interacción de oleaje lineal que incide sobre un rompeolas vertical, delgado y poroso con un obstáculo rectangular fijo y semi-sumergido, su solución fue verificada mediante resultados experimentales. Por otra parte, Wang et al. [21] obtuvieron analíticamente valores de los coeficientes de reflexión y transmisión del oleaje, generados por un sistema de placas planas horizontales. Söylemez y Gören [22] obtuvieron una solución analítica para la difracción de oleaje oblicuo por cilindros rectangulares, horizontales y fijos en la superficie libre y montados sobre el fondo en aguas de profundidad finita. Abul-Azm y Gesraha [23], empleando expansiones de funciones características, analizaron las propiedades hidrodinámicas de la interacción de oleaje oblicuo con un puente flotante y rígido en aguas de profundidad finita. Con base en la misma metodología, Gesraha [24] estudió la interacción de ondas superficiales oblicuas con un puente flotante extremadamente flexible. Similarmente, Zheng et al. [25] analizaron la radiación y difracción del oleaje por una boya flotante rectangular y una estructura rectangular flotante cerca de una pared lateral, respectivamente.

La interacción del oleaje con rompeolas sumergidos en presencia de escalones es un tópico que han revisado diversos investigadores. Estos estudios están dirigidos al análisis de rompeolas aislados impermeables, Kanoria [26] o series de

estructuras sumergidas. Patarapanich [27] aplicó el método del elemento finito y calculó los coeficientes de reflexión y transmisión para una placa horizontal sumergida en aguas profundas y aguas someras. Posteriormente, con base en el mismo método, Patarapanich calculó las fuerzas vertical y horizontal y el momento ejercido sobre una placa sumergida.

Experimentalmente, Patarapanich y Cheong [28] estudiaron la propagación del oleaje sobre una placa plana, ellos demostraron que para una mínima transmisión del oleaje, el ancho óptimo de la placa es de aproximadamente 0.5-0.7 veces la longitud de onda sobre la placa y el sumergimiento óptimo es alrededor de 0.05- 0.15 veces la profundidad del agua. Cheong y Patarapanich [29] obtuvieron los coeficientes de reflexión y transmisión de un sistema de dos placas horizontales consistente de una placa sobre la superficie y otra sumergida.

Los problemas de reflexión de oleaje incidente por obstáculos de origen natural en el lecho marino, como son las ondulaciones en la arena del fondo, han sido estudiados por muchos investigadores. Usando la teoría de perturbación regular y la técnica de transformación de Fourier, se analizan el problema de la reflexión de oleaje incidente por ondulaciones en el lecho marino. Usha y Uma estudiaron el problema de la reflexión y transmisión de oleaje incidente sobre ondulaciones en el lecho marino en una región finita, considerando el efecto de la tensión superficial. Empleando un análisis de perturbación similar al propuesto por Mandal para abordar problemas bidimensionales de difracción del oleaje por barreras verticales, estudiaron el efecto de la incidencia oblicua del oleaje incluyendo los efectos de la tensión superficial en la superficie libre. Mandal y Gayen.

Recientemente, Mandal y Bora [30] analizaron la dispersión de un tren de ondas debida a pequeñas ondulaciones en el fondo del mar. Empleando un análisis de perturbación simplificado, obtuvieron la corrección de primer orden al potencial de velocidades.

1.2. Propuesta

En la literatura especializada se pudo identificar que los trabajos analíticos relacionados con la interacción del oleaje con estructuras sumergidas consideran únicamente paredes uniformes. El efecto de superficies onduladas, desde una perspectiva teórica, únicamente se ha tratado cuando éstas se presentan en el fondo marino. La interacción del oleaje con rompeolas sumergidos que tengan superficies onduladas, sólo se han tratado experimentalmente y no existen formulaciones analíticas de los coeficientes de reflexión y transmisión del oleaje. De los comentarios anteriores, en este trabajo con base en la teoría lineal del oleaje, se propone obtener una solución analítica que permita analizar la hidrodinámica del oleaje cuando éste interactúa con dos placas sumergidas, el cual tiene superficies onduladas, que siguen una distribución sinusoidal. Debajo de la estructura el fondo es constante.

Aplicando un análisis de perturbación regular a la ecuación de gobierno, el problema se reduce a una serie de problemas de valores en la frontera. Se obtienen los coeficientes de reflexión y transmisión del oleaje y las fuerzas hidrodinámicas que actúan sobre la estructura. Lo anterior se desarrolla para dos configuraciones geométricas. Concretamente, se analizan los siguientes casos: caso 1, dos placas sin ondulaciones sumergidas; caso 2, dos placas con ondulaciones sumergidas de fondo constante.

1.3. Formulación

El oleaje se propaga de izquierda a derecha con una amplitud A_i , de frecuencia angular ω , y longitud de onda λ . Se emplea el sistema de coordenadas cartesianas para definir el problema de valores en la frontera. dos distintas configuraciones geométricas son analizadas, ver Figs.1 (a) y (b), respectivamente. El dominio del fluido está dividido en cinco regiones, nombradas I, II, III, IV y V. En el sistema de coordenadas, el eje x es positivo a la derecha coincidiendo con el nivel medio del agua en un punto medio de la región II, mientras que el eje z apunta hacia arriba, normal al nivel medio del agua. La longitud del rompeolas es $2l$. El desplazamiento de la superficie libre es (x, t) y t es el tiempo. La profundidad a la que están sumergidas las estructuras en las diferentes regiones está indicada con las alturas h_1, h_2 y h_3 . Siendo la altura en la región I igual a la región 5. Adicionalmente, se asume que el fondo es impermeable; sin embargo, los extremos laterales del sistema están completamente abiertos al flujo del oleaje. En particular, se asume que en la región I existe oleaje incidente y reflejado, mientras que en la región V únicamente hay presencia de oleaje transmitido. Los perfiles sinusoidales están representados por D_1, D_2, D_3, D_4 y D_5 .

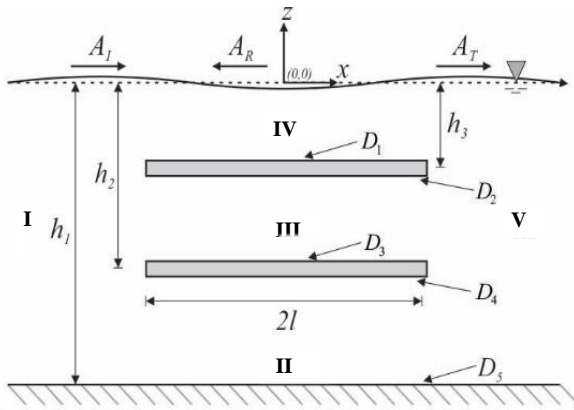


Figura 1. - (a) Dos placas sumergidas sin ondulaciones

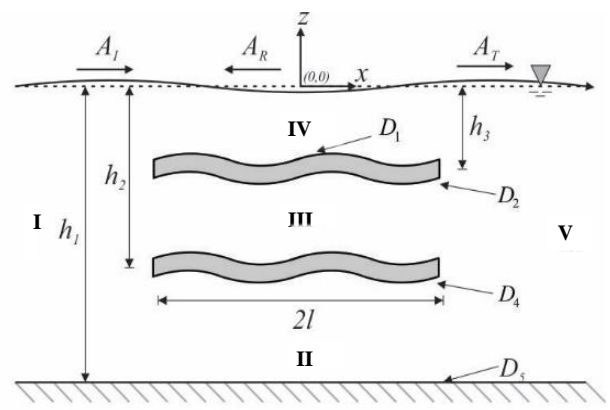


Figura 2. - (b) Dos placas sumergidas con ondulaciones

Los siguientes son los perfiles sinusoidales obtenidos para cada superficie.

$$D_1 = h_3 - A_u \sin \left[\frac{m\pi}{2l} (x + l) \right]$$

$$D_2 = (h_3 + \mu) - A_l \sin \left[\frac{n\pi}{2l} (x + l) \right]$$

$$D_3 = h_2 - A_l \sin \left[\frac{n\pi}{2l} (x + l) \right]$$

$$D_4 = (h_2 + \mu) - A_l \sin \left[\frac{n\pi}{2l} (x + l) \right]$$

$$D_5 = h_1$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial z} + \frac{\partial D_1(x)}{\partial x} \frac{\partial \psi_3}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial z} + \frac{\partial D_2(x)}{\partial x} \frac{\partial \psi_3}{\partial x} = 0$$

1.3.1 Solución analítica para región 2

En la región II, las condiciones de frontera vertical pueden generar variaciones verticales en el potencial de velocidad como consecuencia de la superficie de onda. Teniendo en cuenta la suposición anterior, el potencial de velocidad $\phi_2 = \phi_2(x, z)$ satisface la siguiente ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} = 0$$

Que debe resolverse con las siguientes condiciones de frontera impermeables en las superficies onduladas en $z = -D_4(x)$ y $z = -D_5(x)$, se realiza la sustitución y las ecuaciones resultantes son las siguientes:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial z} + \frac{\partial D_3(x)}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial z} + \frac{\partial D_5(x)}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0$$

1.3.2 Solución analítica para región 3

La región III es similar a la región II las condiciones de frontera vertical pueden generar variaciones verticales en el potencial de velocidad como consecuencia de la superficie de onda. Teniendo en cuenta la suposición anterior, el potencial de velocidad $\phi_3 = \phi_3(x, z)$ satisface la siguiente ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} = 0$$

Que debe resolverse con las siguientes condiciones de contorno impermeables en las superficies onduladas en $z = -D_2(x)$ y $z = -D_3(x)$ se realiza la sustitución y las ecuaciones resultantes son las siguientes:

1.3.3 Solución analítica para región 4

En la región IV, en la cual el fondo es variable, Ec. el potencial de velocidad $\phi_4(x)$ satisface la siguiente ecuación de gobierno.

$$\frac{d}{dx} \left[D_1(x) \frac{d\psi_3(x)}{dx} \right] + \frac{\omega^2}{g} \psi_3(x)$$

1.3.4 Solución analítica para región 1 y 5

Considerando la aproximación de ondas largas lineales en las regiones I y V, donde la profundidad es constante h_1 , los potenciales de velocidad espacial $\phi_1(x)$ y $\phi_5(x)$ satisfacen la ecuación de gobierno.

$$\psi_1 = -i \frac{gA_I}{\omega} \left[e^{ik(x+l)} + \text{Re}^{-ik(x+l)} \right]$$

$$\psi_5 = -i \frac{gA_I}{\omega} T e^{ik(x-l)}$$

1.3.5 Solución asintótica para $\varepsilon \ll 1$

De las condiciones de frontera y el hecho de que el tren de ondas propagándose sobre un obstáculo de paredes lisas ya experimenta reflexión y transmisión, sugiere que la ondulación en la paredes contribuye de manera asintótica en los potenciales R y T y que éstos se pueden expresar en términos del parámetro ε como:

$$\phi_j = \phi_{j,0} + \varepsilon \phi_{j,1} + \varepsilon^2 \phi_{j,2} + O(\varepsilon^3) \quad \text{for } j = 1, 2, 3, 4,$$

$$T = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + O(\varepsilon^3).$$

$$R = R_0 + \varepsilon R_1 + \varepsilon^2 R_2 + O(\varepsilon^3)$$

1.3.6 Solución para orden zero

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & -1 \\ i & 0 & \frac{H_l}{\mu} (H_l - H_m) & \sqrt{\gamma} \sin \alpha & \sqrt{\gamma} \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{H_l}{\mu} (H_l - H_m) & -\sqrt{\gamma} \sin \alpha & \sqrt{\gamma} \cos \alpha & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{R,0} \\ E_0 \\ F_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ \beta_{T,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos los valores para los coeficientes de transmisión y reflexión

$$R_0 = \frac{i[\mu(\gamma - 1)\cos\alpha + \Pi_1\sqrt{\gamma}\sin\alpha]\sin\alpha}{b_0}$$

and

$$T_0 = \frac{\mu\sqrt{\gamma} + \Pi_1\sin 2\alpha}{b_0}$$

2. Resultados

Se analiza el efecto de los distintos parámetros físicos adimensionales en la reflexión/transmisión de energía y en la elevación de la superficie libre, así como las fuerzas inducidas por el oleaje sobre las placas sumergidas. Primeramente, se presenta la comparación de los resultados del presente modelo matemático contra los obtenidos por Patarapanich [37, 38] y Bora et al. [52], respectivamente. Posteriormente, en las Figs. 3 se presentan resultados de los efectos de diferentes condiciones de oleaje, longitud de la estructura, sumergimiento, número y amplitud de las ondulaciones para dos configuraciones geométricas diferentes. Adicionalmente, para la elevación de la superficie libre adimensional, se presenta la comparación de los resultados numéricos contra los obtenidos analíticamente. Por último, para condiciones físicas similares, se comparan los dos casos y se identifica el efecto que cada una de las estructuras tiene en la reflexión de la energía del oleaje. Para el cálculo de los resultados, se utilizaron los siguientes valores típicos de las variables físicas: $h_1 = 10$ m, $h_2 = 9$ m, $h_3(8, 10)$ m, $h_4 = 3$ m, longitud de la estructura de $l = 30$ m.

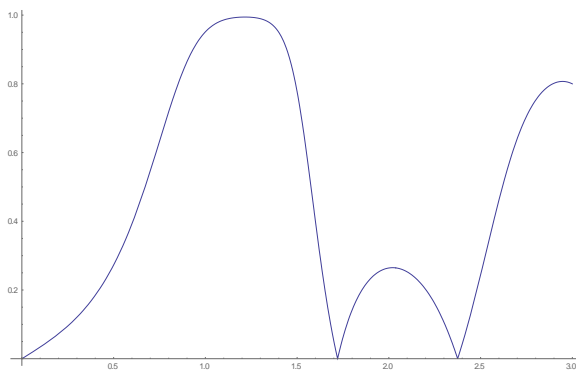


Fig.3 Coeficiente de Reflexión

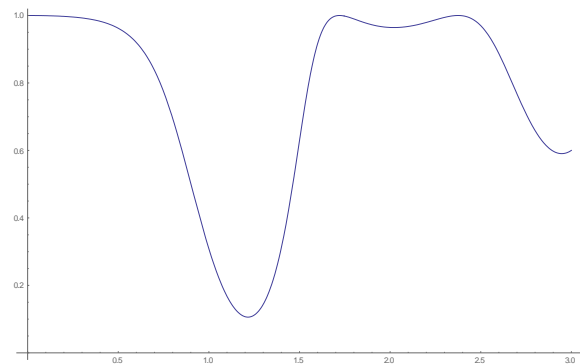


Fig.4 Coeficiente de Transmisión

Conclusiones

Con base en la teoría lineal de ondas largas, se analiza la interacción del oleaje con dos estructuras sumergidas de paredes planas y otro caso con superficies onduladas en fondo constante. En el presente estudio, se analizan dos diferentes configuraciones geométricas de las estructuras sumergidas y se presentan fórmulas para los coeficientes de reflexión CR y transmisión CT. Se realiza una comparación de los resultados analíticos con los reportados en la literatura especializada, los cuales se ajustan correctamente.

Las observaciones más destacadas que se obtuvieron en el presente trabajo se resumen de la siguiente manera:

1. El aumento de la amplitud en las paredes onduladas de la estructura, contribuyen significativamente en la reflexión de la energía del oleaje.
2. Los resultados muestran que el rompeolas sumergido es más efectivo en el incremento de la reflexión del oleaje, cuando el parámetro h_4/h_1 es pequeño.

Agradecimientos

Agradecimiento al CONACYT por el apoyo para este proyecto con número 221116.

Agradecimiento al programa de Becas de Estímulo Institucional de Formación de Investigadores (BEIFI) por la beca otorgada en el proyecto de investigación con número de referencia SIP-20170807

REFERENCIAS

- [1] S A Sannasiraj, V Sundar, and R Sundaravadivelu. The hydrodynamic behaviour of long floating structures in directional seas. *Applied Ocean Research*, 26:233–243, 1995.
- [2] A S Koraim. Hydrodynamic efficiency of suspended horizontal rows of half pipes used as a new type breakwater. *Ocean Engineering*, 64:1–22, 2013.
- [3] J N Newman. Propagation of water waves over an infinite step. *Journal of Fluid Mechanics*, 23(02):399–415, 1965.
- [4] J W Miles. Surface-wave scattering matrix for a shelf. *Journal of Fluid Mechanics*, 28:755–767, 1967.
- [5] C C Mei and J L Black. Scattering of surface waves by rectangular obstacles in water of finite depth. *Journal of Fluid Mechanics*, 38(3):499–511, 1969.
- [6] H Lamb. *Hydrodynamics*, sixth Ed. Cambridge University Press, 1932.
- [7] J L Black, C C Mei, and M C G Bray. Radiation and scattering of water waves by rigid bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 46:151–164, 1971. [10] M. Soylemez, O. Goren, Diffraction of oblique waves by thick rectangular barriers, *Appl. Ocean Res.* 25 (2003) 345–353.
- [8] J T Kirby and R A Dalrymple. Propagation of obliquely incident water waves over a trench. *Journal of Fluid Mechanics*, 133:47–63, 1983.
- [9] N Drimer, Y Agnon, and M Stiassnie. A simplified analytical model for a floating breakwater in water of finite depth. *Applied Ocean Research*, 14:33–41, 1992.
- [10] A N Williams. Froude-krylov force coefficients for bodies of rectangular section in the vicinity of the free-surface and seabed. *Ocean Engineering*, 21(7):663–682, 1994.
- [11] A E Heins. Water waves over a channel of finite depth with a submerged plane barrier. *Canadian Journal of Mathematics*, 2:210–222, 1950.
- [12] J J Stoker. *Water waves*. Interscience, New York, 1957.
- [13] P F Siew and D G Hurley. Long surface waves incident on a submerged horizontal plate. *Journal of Fluid Mechanics*, 83:141–151, 1977.
- [14] R Usha and T Gayathri. Wave motion over a twin-plate breakwater. *Ocean Engineering*, 32:1054–1072, 2005.
- [16] A G Abul-Azm. Wave diffraction through submerged breakwaters. *Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering*, 119:587–605, 1993.
- [17] C Wu, E Watanabe, and T Utsunomiya. An eigenfunction expansion matching method for analyzing the wave-induced responses of an elastic floating plate. *Applied Ocean Research*, 17:301–310, 1995.
- [18] H F Cheong, N J Shankar, and S Nallayarasu. Analysis of submerged platform breakwater by eigenfunction expansion method. *Ocean Engineering*, 23(8):649–666, 1996.
- [19] S Nallayarasu, H F Cheong, and N Jothi Shankar. Wave induced pressures and forces on a fixed submerged inclined plate. *Finite Elements in Analysis and Design*, 18:289–299, 1994.
- [20] H T O Yang, L H Huang, and W S Hwang. The interference of a semisubmerged obstacle on the porous breakwater. *Applied Ocean Research*, 19:263–273, 1997.
- [21] K H Wang and Q Shen. Wave motion over a group of submerged horizontal plates. *International Journal of Engineering Science*, 37:703–715, 1999.
- [22] M Söylemez and O Gören. Diffraction of oblique waves by thick rectangular barriers. *Applied Ocean Research*, 25:345–353, 2003.
- [23] A G Abul-Azm and M R Gesraha. Approximation to the hydrodynamics of floating pontoons under oblique waves. *Ocean Engineering*, 27:365–384, 2000.
- [24] M R Gerasha. An eigenfunction expansion solution for extremely flexible floating pontoons in oblique waves. *Applied Ocean Research*, 26:171–182, 2004.
- [25] Y H Zheng, Y G You, and Y M Shen. On the radiation and diffraction of water waves by a rectangular buoy. *Ocean Engineering*, 31:1063–1082, 2004.
- [26] M Kanoria. Water wave scattering by a submerged thick wall with a gap. *Applied Ocean Research*, 21:69–80, 1999.
- [27] M Patarapanich. Maximum and zero reflection from submerged plate. *Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering*, 110:171–181, 1984.
- [28] M Patarapanich. Forces and moment on a horizontal plate due to wave scattering. *Coastal Engineering*, 8:279–301, 1984.
- [29] M Patarapanich and H F Cheong. Reflection and transmission characteristics of regular and random waves from a submerged horizontal plate. *Coastal Engineering*, 13:161–182, 1989.
- [30] S.N. Bora, C. Martha, Scattering of surface waves over an uneven sea-bed, *Appl. Math. Lett.* 21 (2008) 1082–1089.