

SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LA ECUACIÓN MODIFICADA DE LA PENDIENTE SUAVE PARA MODELAR LA INTERACCIÓN DEL OLEAJE CON UN ROMPEOLAS CICLOIDAL – SUMERGIDO

^a*M. Barbosa , ^b E. Bautista, ^c F. Méndez

a,b Instituto Politécnico Nacional, SEPI ESIME UA, Av. de las Granjas No. 682, Col. Santa Catarina, Del. Azcapotzalco, Ciudad de México, C.P. 02250.

c Departamento de Termofluidos, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, C.P. 04510.

*E-mail: mabl0214@gmail.com

RESUMEN

Este trabajo presenta una solución analítica aproximada de la ecuación modificada de la pendiente suave, la cual modela la interacción del oleaje con un rompeolas sumergido de sección transversal cicloidal. La solución analítica se obtiene mediante un método matricial para obtener polinomios de Taylor. Se proponen fórmulas recursivas para calcular las derivadas de orden arbitrario involucradas en la solución analítica. La ecuación modificada de la pendiente suave se presenta en su forma adimensional y es función de un parámetro cinemático, que es el producto del número de onda y la profundidad, y un parámetro geométrico, que relaciona la longitud característica de la estructura cicloidal y la profundidad del agua. Se obtienen los coeficientes de reflexión y transmisión del oleaje y la variación de la superficie libre del mar para profundidades intermedias y someras. Los resultados muestran que para ciertos valores discretos del parámetro cinemático, ocurre el fenómeno de reflexión cero. Se muestra que la solución analítica obtenida, tiene un margen de aplicación ingenieril mayor en el diseño de las configuraciones geométricas de rompeolas cicloidales comparadas con las reportadas en la literatura especializada, debido a que permite estudiar la hidrodinámica del oleaje desde aproximaciones de ondas cortas hasta largas.

Palabras Clave: Solución analítica aproximada, Polinomios de Taylor, Ecuación modificada de la pendiente suave, Rompeolas cicloidal-sumergido, Reflexión/Transmisión del oleaje.

ABSTRACT

This work presents an approximate analytical solution of the modified mild-slope equation, which models the interaction of the water waves with a submerged-breakwater of cycloidal transversal cross-section. The analytical solution with a matricial method Taylor polynomials is obtained. Recursive formulas to calculate the derivatives of arbitrary order involved in the analytical solution are presented. The modified mild-slope equation is presented in its dimensionless form and it is a function of a kinematical parameter, that is formed by the product of the wave number and the water depth, and a geometrical parameter, that relates the characteristic length of the cycloidal structure and the water depth. The reflection and transmission coefficients as well as the free surface elevation of the water waves for shallow flows and intermediate depths are obtained. The results shown that for some discrete values of the kinematical parameter, the zero-reflection phenomenon occurs. It is shown that the analytical solution obtained, has a greater engineering application margin in the design of the geometric configurations of cycloidal breakwaters than those reported in the specialized literature, due to the fact that, the present mathematical model allows us to study the hydrodynamic of the water waves from shallow flows to intermediate depths.

Keywords: Approximate analytical solution, Taylor polynomials, Modified mild-slope equation, Cycloidal-submerged breakwaters, Reflection/transmission of water waves.

INTRODUCCIÓN

Los límites de las zonas costeras son constantemente afectados por los fenómenos meteorológicos, los cuales provocan inestabilidades en el oleaje del mar; por tal motivo, existe un gran interés en realizar investigaciones científicas enfocadas en la hidrodinámica del oleaje. En situaciones relacionadas con la prevención de riegos, lo ideal es tener un oleaje en calma. Uno de los riesgos más significativos sobre el litoral marítimo es la erosión costera. Comúnmente el trabajo de protección costera, consiste en estabilizar una línea de playa expuesta, restaurar el área de la zona erosionada o dañada y crear o estabilizar playas artificiales. Existen diversas formas para combatir la erosión en las regiones afectadas, pero son procesos muy costosos y al mismo tiempo son una solución que no ayudan a resolver de manera definitiva el problema. Un ejemplo de este tipo de procesos, aplicado a la reintegración de playas consiste en importar arena de regiones alejadas de la costa, la cual es reemplazada por la arena perdida a causa de la erosión. De tal manera, surge la necesidad de desarrollar estructuras artificiales que mitiguen los efectos provocados por el oleaje, una de estas estructuras artificiales son los rompeolas; generalmente, se dividen en dos grupos: los que sólo atenúan la energía del oleaje y los que bloquean totalmente el flujo del oleaje hacia la costa. Los primeros, a su vez se dividen en rompeolas sumergidos [1], emergidos y flotantes.

Los rompeolas sumergidos han llegado a ser la mejor solución para la protección de las costas, entre las ventajas que proporcionan, se encuentran que dan una imagen más estética que los rompeolas comunes, que son muy evidentes a la vista, esta característica es importante para mantener el valor turístico de muchas playas y es usualmente una de las consideraciones para el uso de estructuras sumergidas. La aplicación de estos rompeolas, es reducir la erosión en las playas causando que cierta cantidad de energía incidente del oleaje se disipe al pasar sobre ellos, en lugar de bloquear totalmente el flujo que se dirige a la costa. En cuestión de costos, existen muchos estudios que demuestran que es más barato construir rompeolas sumergidos que rellenar constantemente las playas dañadas. Debido a su bajo costo y a su efectividad en la disminución de la energía del oleaje, los rompeolas sumergidos han cobrado importancia en el área de la hidráulica marítima, los cuales presentan una variedad de formas y su rendimiento suele evaluarse con base en los resultados obtenidos en la práctica. Hoy en día, la solución que se requiere para proteger a las regiones costeras de la acción del oleaje, es la que permita el transporte litoral de sedimentos y el libre tránsito de la fauna marina.

Antecedentes

Varios investigadores han realizado diversos estudios relacionados con la hidrodinámica inducida por la interacción del oleaje con estructuras, las cuales pueden ser obstáculos sumergidos o emergidos [2], mismos que tienen la finalidad de reflejar la energía del oleaje que se propaga. Dentro de las distintas variedades geométricas y estructurales en los rompeolas sumergidos, la forma semicircular es la más estudiada para estructuras curvilíneas. Sin embargo, el uso de tubos geotextiles, se ha aplicado de diversas maneras en los campos de ingeniería hidráulica y costera, los geotubos utilizados para la protección costera, pueden encontrarse sobre la línea costera [3] o sumergidos [4]. Los geotubos son geotextiles de polipropileno de alta resistencia a la tracción, diseñados para recibir y retener el material bombeado, permitiendo que el contenido del agua escape a través de poros finos hasta alcanzar la densidad requerida de material contenido [5]. Los estudios reportados en la literatura especializada proporcionan únicamente información cualitativa y por lo tanto, el diseño de tubos geotextiles como rompeolas sumergidos requieren nuevos modelos predictivos para la transmisión de energía de las olas [6]. La forma de la sección transversal de un geotubo se deriva de un procedimiento numérico como una función de parámetros físicos, tales como el peso específico del material de relleno y la presión de bombeo usada para llenar el geotubo con el material de relleno [7]. De acuerdo con la comparación de la geometría cicloidial, un prototipo experimental de un geotubo de yeso y la solución numérica para la sección transversal de un geotubo que se encuentra sobre una base rígida propuesta por Guo *et al.* [7], se considera que la sección transversal de los geotubos obedece, como primera aproximación, una geometría cicloidial [8].

Cuando el oleaje se propaga sobre una estructura sumergida ocurren importantes efectos de reflexión, transmisión y deformación de la superficie libre del oleaje, los que deben tenerse en cuenta para la correcta implementación de un rompeolas. En la literatura especializada existen diversos estudios analíticos, numéricos y experimentales que estudian la interacción del oleaje con rompeolas sumergidos. En este contexto, Lamb [9] fue uno de los pioneros en proponer soluciones analíticas para calcular los coeficientes de reflexión y transmisión del oleaje, en presencia de un escalón infinitamente largo. De manera similar, Kreisel [10] presentó un análisis para caracterizar la hidrodinámica del oleaje inducida por obstáculos de longitud finita con geometría conocida. Un trabajo pionero en el análisis de la propagación del oleaje sobre rompeolas curvilíneos sumergidos fue presentado por Forbes [11], quien calculó la superficie libre de una corriente perturbada por un rompeolas semielíptico sumergido. Medina-Rodríguez *et al.* [8] obtuvieron los coeficientes de reflexión y transmisión de ondas de agua lineales largas, propagándose sobre un rompeolas sumergido cuya sección transversal obedece a una transición geométrica cicloidial.

Una de las teorías que permiten obtener una solución analítica de la hidrodinámica del oleaje, es la teoría lineal de ondas, la cual establece que la amplitud del oleaje es mucho menor que la profundidad del agua. El modelo matemático más simplificado para estudiar el oleaje, es la teoría lineal de ondas largas, la cual tiene una restricción de aplicación ingenieril muy importante, la cual se aplica cuando la profundidad del agua es mucho menor que la longitud de onda. Para cubrir la deficiencia anterior, en la teoría lineal de ondas, la ecuación de la pendiente suave se usa ampliamente debido a que permite estudiar los fenómenos de la refracción y la difracción del oleaje. Eckart [12,13] fue quien propuso el primer modelo matemático que describe la propagación del oleaje en profundidades intermedias, la cual fue mejorada por Berkhoff [14,15], quien derivó un modelo matemático más general, llamado ecuación de la pendiente suave. Booij [16] realizó una serie de experimentos numéricos para verificar la exactitud de la ecuación de la pendiente suave y concluyó que esta produce resultados precisos siempre que la pendiente sobre la cual se propaga el oleaje sea menor de 1:3.

Debido a las limitaciones de la profundidad que se presentan en la ecuación de la pendiente suave, se derivaron extensiones de esta ecuación convencional, para admitir variaciones en la profundidad. Kirby [17] derivó la primera ecuación extendida de la pendiente suave, demostró que la ecuación extendida de la pendiente suave modela con éxito la resonancia que se presenta en la dispersión del oleaje, comparando los cálculos numéricos con datos experimentales de Davies y Heathershaw [18]. Con el fin de aumentar la capacidad de tratar con pendientes pronunciadas, Chamberlain y Porter [19] derivaron la ecuación modificada de la pendiente suave, en la que incluyen los términos de orden superior, tales como el término de curvatura inferior y el término de cuadratura de la pendiente. Otras versiones mejoradas de la ecuación de la pendiente suave fueron dadas por Porter y Staziker [20], Athanassoulis y Belibassakis [21] y Toledo y Agnon [22].

Cuando se consideran problemas para profundidades intermedias, es difícil obtener una solución analítica de la ecuación modificada de la pendiente suave, principalmente porque la relación de dispersión lineal está implícita en las funciones de los coeficientes de esta ecuación. Yang [23] derivó varias fórmulas recursivas para calcular los dos coeficientes implícitos, el número de onda y la relación de las celeridades, en series de Taylor a orden arbitrario para topografías lisas, por lo que se construyó con éxito una solución analítica de la ecuación de la pendiente suave en términos de series de Taylor para la reflexión de ondas unidimensional. Más adelante, construyendo varias fórmulas recursivas para calcular derivadas de orden arbitrario implícitas en los términos de segundo orden, Liu *et al.* [24] extendieron la técnica analítica de Yang [23] para resolver la ecuación modificada de la pendiente suave para algunas topografías unidimensionales, estudiaron las reflexiones del oleaje para cuatro batimetrías diferentes: una pendiente lineal, una superficie parabólica, una superficie en función del coseno y una superficie ondulatoria sinusoidal, mostraron que los resultados obtenidos por la ecuación modificada de la pendiente suave son más precisos que los resultados obtenidos por la ecuación de la pendiente suave convencional.

Recientemente, Hsiao *et al.* [25], haciendo uso de la ecuación modificada de la pendiente suave, analizaron la hidrodinámica de la interacción del oleaje con un obstáculo cónico sumergido. Posteriormente, Liu *et al.* [26] analizaron la reflexión del oleaje por rompeolas rectangulares sumergidos con dos zanjas de drenaje, muestran que en toda la gama de ondas, el fenómeno de reflexión cero frecuentemente se produce para batimetrías simétricas. Basándose en la ecuación modificada de la pendiente suave Liu y Xie [27] obtuvieron una solución en términos de series de cosenos de Fourier y series de Taylor para la dispersión del oleaje por la isla Homma, y demostraron que esta ecuación puede modelar la dispersión del oleaje desde ondas muy largas hasta ondas muy cortas.

Propuesta

Se propone desarrollar un modelo matemático sustentado en la teoría lineal de ondas, que permita describir la hidrodinámica del oleaje que se propaga sobre un rompeolas sumergido cuya sección transversal obedece a una geometría cicloidal. Aplicando la ecuación modificada de la pendiente suave, se pueden considerar los efectos de las ondas de agua lineales largas y cortas, lo que significa que será válido para zonas someras y zonas con profundidad intermedia. Empleando un método matricial basado en los polinomios de Taylor a la ecuación modificada de la pendiente suave, se obtienen los coeficientes de reflexión y transmisión sobre el mar, lo anterior se desarrolla para una configuración



Figura 1. Rompeolas cicloidal-sumergido.

La selección de la geometría cicloidal se basa en el estudio experimental que realizaron Medina-Rodríguez *et al.* [8]. La geometría cicloidal obedece a las siguientes ecuaciones paramétricas [28]:

$$X_0 = r(\theta - \sin \theta) \quad (1)$$

$$Z_0 = r(1 - \cos \theta) \quad (2)$$

donde (X_0, Z_0) son las coordenadas del punto P_0 referenciado a los ejes x y z , mientras que r representa el radio del círculo que genera el ángulo θ , en radianes, a lo largo del eje x . Mediante la construcción de un prototipo experimental, Medina-Rodríguez *et al.* [8] identificaron que la selección transversal de un geotubo en el intervalo $\mu/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$, puede obedecer a una geometría cicloidal. Adicionalmente Medina-Rodríguez *et al.* [8] compararon la sección transversal del prototipo con la solución numérica de la sección transversal de un geotubo sobre una base rígida propuesta por Guo *et al.* [7] y se encontró que éstas ajustan correctamente, los comentarios anteriores justifican la selección de la geometría cicloidal.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

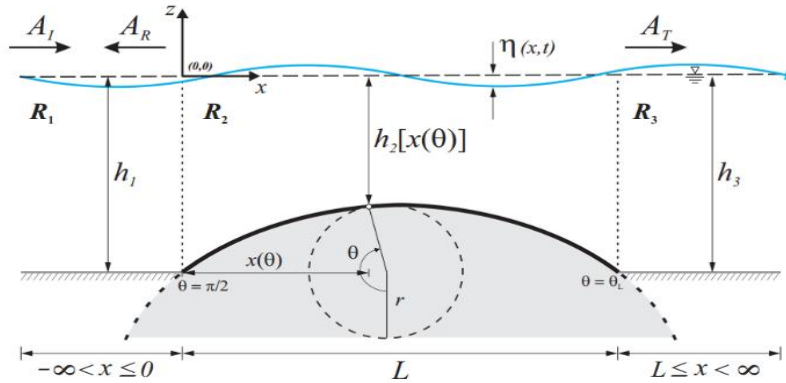


Figura 2. Esquema de la interacción del oleaje con un rompeolas cicloidal.

Modelo físico

En la Fig. 2 se muestra el diagrama en vista lateral del modelo físico. Se considera una onda lineal de agua que tiene una amplitud incidente A_I , la cual se propaga de izquierda a derecha en una profundidad con transición geométrica cicloidal. El modelo físico está formado por tres regiones diferentes R_1 , R_2 y R_3 , donde la región R_2 define el carácter variable de la sección transversal cicloidal, mientras que las regiones R_1 y R_3 asumen valores uniformes para la profundidad del modelo físico. En el sistema de coordenadas cartesiano seleccionado, el eje x es positivo a la derecha y tiene su origen en la intersección de las regiones R_1 y R_2 . Para obtener el mejor ajuste entre el prototipo hecho por Medina-Rodríguez *et al.* [8] y las ecuaciones paramétricas (1) y (2) se selecciona el ángulo $\theta = \pi/2$ como origen del sistema de referencia; sin embargo, se pueden seleccionar otros valores de θ , excepto el valor de $\theta = 0$, ya que para este ángulo, la solución analítica, representada más adelante es indefinida. El eje z apunta hacia el exterior en la dirección normal al nivel medio del agua. El intervalo de la región de transición R_2 es $0 \leq x(\theta) \leq L$, donde L es la proyección horizontal del rompeolas y $\theta_L < 2\pi$ es el valor máximo del ángulo θ en $x = L$, mientras que las regiones R_1 y R_3 están definidas por los intervalos $-\infty \leq x(\theta) \leq 0$ y $L \leq x(\theta) \leq \infty$, respectivamente. La estructura tiene una longitud L_y normal al plano $x - z$ con $L_y \gg L$ y $L_y \gg \lambda$, donde λ es la longitud de onda.

Se asume que el fondo es impermeable. Sin embargo, las fronteras verticales, izquierda y derecha, de los extremos del sistema están completamente abiertas al flujo del oleaje, por lo tanto, se asume que en el lado izquierdo existe oleaje incidente y reflejado, mientras que en el lado derecho hay únicamente presencia de oleaje transmitido. El origen de la geometría cicloidal, Ecs. (1) y (2) es trasladado al origen del nuevo sistema de referencia $x - z$. Tomando en cuenta las consideraciones mencionadas, las profundidades de agua prescritas a lo largo de las tres regiones están dadas por las siguientes relaciones:

$$h = \begin{cases} h_1 & \text{en } x \leq 0 \\ h_2[x(\theta)] = h_1 + r \cos \theta & \text{en } 0 \leq x(\theta) \leq L, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta_L \\ h_3 & \text{en } x \geq L \end{cases}$$

La ecuación paramétrica para la distribución horizontal a lo largo del eje x de la geometría cicloidal en la región R_2 está dada por:

$$x(\theta) = r \left(\theta - \sin \theta + 1 - \frac{\pi}{2} \right) \quad (3)$$

De la Ec. (3) se puede deducir que la longitud L de la transición cicloidal y la profundidad h_3 , pueden expresarse como:

$$L = r \left(\theta_L - \sin \theta_L + 1 - \frac{\pi}{2} \right) \quad (4)$$

$$h_3 = h_1 + r \cos \theta_L \quad (5)$$

Ecuaciones de gobierno

La ecuación modificada de la pendiente suave para un oleaje armónico y unidimensional, en condiciones de flujo incompresible e irrotacional, está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{d \ln(CC_g)}{dx} \frac{d\eta}{dx} + B(x)\eta \quad (6)$$

con

$$B(x) = k^2 + \frac{u_1}{CC_g} h'' + \frac{u_2}{CC_g} (h')^2 \quad (7)$$

$$CC_g = \frac{g\omega^2 - \omega^4 h + g^2 k^2 h}{2gk^2} \quad (8)$$

$$u_1 = \frac{(g^2 k^2 - \omega^4)(g\omega^2 - g^2 k^2 h - \omega^4 h)}{4gk^2(g^2 k^2 h - \omega^4 h + g\omega^2)} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{(g^2 k^2 - \omega^4)^4}{96gk^4(g^2 k^2 h - \omega^4 h + g\omega^2)^3} \left[16(kh)^4 + \frac{64g\omega^2 k^4 h^3}{(g^2 k^2 - \omega^4)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{72g^2 \omega^4 k^2 (g^2 k^2 + \omega^4)}{(g^2 k^2 - \omega^4)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{12k^2 h (g^2 k^2 h - \omega^4 h + 2g\omega^2)(g^2 k^2 + \omega^4)^2 - 2(g^4 k^4 + \omega^8) + 3(g^2 k^2 - \omega^4)^2}{(g^2 k^2 - \omega^4)^3} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

donde η es la amplitud de la superficie libre, C y C_g son las velocidades de fase y de grupo de las ondas, respectivamente, g representa la aceleración gravitacional, la profundidad del agua se expresa con h , k es el número de onda, $\omega = 2\pi/T_o$ es la frecuencia angular del oleaje y T_o su periodo.

Cuando la onda incidente que viaja de izquierda a derecha se propaga sobre la región R_1 y se impacta con el rompeolas, ésta se divide en dos partes, una parte que se refleja en sentido contrario a la onda incidente y otra que se trasmite a lo largo de la estructura hasta la región R_3 . Por tal motivo, las soluciones analíticas para la elevación de la superficie libre del mar en las regiones R_1 y R_3 se expresan en la siguiente forma:

$$\bar{\eta} = A_I e^{ik_1 x} + A_R e^{-ik_1 x} \quad (11)$$

$$\bar{\eta} = A_T e^{ik_3 x} \quad (12)$$

respectivamente, donde k_1 y k_3 son los números de onda, A_R y A_T representan las amplitudes complejas y desconocidas del oleaje reflejado y transmitido, respectivamente.

El problema de valores de frontera definido por la Ec. (6) requiere de condiciones de frontera apropiadas, las cuales se expresan a continuación:

$$\bar{\eta}(x=0) = \eta(x=0) \quad (13)$$

$$\eta(x=L) = \bar{\eta}(x=L) \quad (14)$$

Las Ecs. (11) y (12) son funciones de las amplitudes complejas A_R y A_T para obtenerlas se necesitan dos condiciones de frontera adicionales, por lo cual se hace uso del principio de conservación de la masa en estado estacionario entre las uniones de las regiones $R_1 - R_2$ y $R_2 - R_3$:

$$\left. \frac{d\bar{\eta}}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\eta}{dx} \right|_{x=0} \quad (15)$$

$$\left. \frac{d\eta}{dx} \right|_{x=L} = \left. \frac{d\bar{\eta}}{dx} \right|_{x=L} \quad (16)$$

Modelo matemático adimensional

Con la finalidad de disminuir el número de combinaciones posibles de las variables físicas que están involucradas en la Ec. (6) las ecuaciones de gobierno se presentan en forma adimensional. Para llevar a cabo lo anterior, se proponen las escalas características pertinentes. En las regiones R_1 y R_3 las escalas espaciales en la dirección x son las longitudes de onda λ_1 y λ_3 , respectivamente, las cuales están relacionadas con los números de onda $k_1 = 2\pi/\lambda_1$ y $k_3 = 2\pi/\lambda_3$. En la región R_2 la escala característica horizontal es la longitud L , mientras que la correspondiente para la superficie libre del oleaje, es la amplitud del oleaje incidente A_I . Con base en lo anterior, las variables adimensionales para las regiones R_1 , R_2 y R_3 se definen en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} R_1 : \chi_1 = k_1 x \quad y \quad \delta_1(\chi_1) &= \frac{\bar{\eta}(x)}{A_I} \\ R_2 : \chi_2 = \frac{x}{L}, \quad \delta_2(\chi_2) &= \frac{\eta(x)}{A_I}, \quad \tilde{h} = \frac{h_2[x(\theta)]}{h_1} \quad y \quad \kappa = \frac{k}{k_1} \\ R_3 : \chi_3 = k_3 x \quad y \quad \delta_3(\chi_3) &= \frac{\bar{\eta}(x)}{A_I} \end{aligned} \quad (17)$$

En términos de las variables adimensionales mencionadas y aplicando las ecuaciones paramétricas antes mencionadas, la ecuación modificada de la pendiente suave Ec. (6) toma la siguiente forma:

$$(1 - \cos \theta) \frac{d^2 \delta_2}{d\theta^2} + \left[(1 - \cos \theta) \frac{d \ln(\overline{CC_g})}{d\theta} - \sin \theta \right] \frac{d\delta_2}{d\theta} + B(\theta) \delta_2 = 0 \quad (18)$$

donde

$$B(\theta) = (\gamma\mu)^2(1 - \cos\theta)^3 + \frac{B_1\mu(1 - \cos\theta)}{2F^2} + \frac{B_2\mu^2 \sin^2\theta (1 - \cos\theta)}{6F^4} \quad (19)$$

$$\frac{CC_g}{2\kappa^2} = \frac{(1 - \gamma^2\tilde{h} + \tilde{h}\kappa^2)}{2\kappa^2} \quad (20)$$

$$B_1 = \kappa^2 - \tilde{h}\kappa^4 + \gamma^4\tilde{h} - \gamma^2 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} B_2 = & 2\gamma^2\tilde{h}^4\kappa^{10} - (8\gamma^4\tilde{h}^4 - 8\gamma^2\tilde{h}^3 - 3\tilde{h}^2)\kappa^8 \\ & + 6(2\gamma^6\tilde{h}^4 - 4\gamma^4\tilde{h}^3 - 2\gamma^2\tilde{h}^2 + \tilde{h})\kappa^6 \\ & - (8\gamma^8\tilde{h}^4 - 24\gamma^6\tilde{h}^3 - 24\gamma^4\tilde{h}^2 + 18\gamma^2\tilde{h} + 9)\kappa^4 \\ & + 2(\gamma^{10}\tilde{h}^4 - 4\gamma^8\tilde{h}^3 - 12\gamma^4\tilde{h}^2 + 15\gamma^4\tilde{h})\kappa^2 + 9\gamma^8\tilde{h}^2 \\ & - 18\gamma^6\tilde{h} + 9\gamma^4 \end{aligned} \quad (22)$$

$$F = (1 - \gamma^2\tilde{h} + \tilde{h}\kappa^2) \quad (23)$$

De las ecuaciones anteriores se obtienen los siguientes parámetros adimensionales, parámetro geométrico $\mu = r/h_1$ y parámetro cinemático $\gamma = k_1 h_1$.

Considerando las Ecs. (11) y (12) y aplicando las variables adimensionales descritas en la Ec. (17), se obtienen las soluciones analíticas para las amplitudes de las ondas en su forma adimensional de las regiones R_1 y R_3 dadas por:

$$\delta_1(\chi_1) = e^{i\chi_1} + \beta_R e^{-i\chi_1} \quad (24)$$

$$\delta_3(\chi_3) = \beta_T e^{i\chi_3} \quad (25)$$

respectivamente, con $\beta_R = A_R/A_I$ y $\beta_T = A_T/A_I$.

Las condiciones de fronteras adimensionales son:

$$\delta_1(\chi_1 = 0) = \delta_2\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) \quad (26)$$

$$\delta_2(\theta = \theta_L) = \delta_3(\chi_3 = k_3 L) \quad (27)$$

Evaluando la Ec. (26) en $\chi_1 = 0$, se obtiene que $\delta_1(\chi_1 = 0) = 1 + \beta_R$ y la Ec. (27) en $\chi_3 = k_3 L$, se tiene que $\delta_3(\chi_3 = k_3 L) = \beta_T e^{ik_3 L}$.

METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN

Solución analítica aproximada

En esta sección se obtiene una solución analítica de la Ec. (6) utilizando un método estándar para determinar soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, homogéneas y no-homogéneas con coeficientes variables. La solución se obtiene en términos de polinomios de Taylor y seguimos la metodología propuesta por Sezer [29].

La Ec. (6) es una ecuación diferencial que tiene la siguiente forma:

$$P(\theta) \frac{d^2\delta_2}{d\theta^2} + Q(\theta) \frac{d\delta_2}{d\theta} + R(\theta)\delta_2 = 0 \quad (28)$$

Para resolver la Ec. (28), se introduce la siguiente notación: $P^{(i_0)}(c)$, $Q^{(i_0)}(c)$ y $R^{(i_0)}(c)$, representando los números de la i_0 derivadas de las funciones conocidas $P(\theta)$, $Q(\theta)$ y $R(\theta)$, donde c es cualquier valor en el intervalo $\pi/2 \leq c \leq \theta_L$; el caso particular de $i_0 = 0$ representa la función evaluada en $\theta = c$.

La solución analítica aproximada de la Ec. (28) se expresa en términos del siguiente polinomio de Taylor:

$$\delta_2 = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} y^{(n)}(c)(\theta - c)^n \quad (29)$$

de grado N en $\theta = c$ y $y^{(n)}(c)$, para $n = 0, 1, \dots, N$, son los coeficientes desconocidos que deben determinarse.

Rompeolas cicloidal

El rompeolas cicloidal está delimitado en el intervalo $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$ con $h_1 = h_3$. Se propone un valor de $c = \pi$.

$$\delta_2 = \sum_{n=0}^N f_{n,N-1} \frac{(\theta - \pi)^n}{n!} (1 + \beta_R) + \sum_{n=0}^N f_{n,N} \frac{(\theta - \pi)^n}{n!} (\beta_T e^{ik_3 L}) \quad (30)$$

Para el caso anterior $f_{n,N-1}$ y $f_{n,N}$, para $n = 0, 1, \dots, N$ son los elementos de la matriz obtenida de la metodología presentada. Precisamos que la Ec. (30) es función de las constantes complejas desconocidas β_R y β_T , que se obtienen a partir de las condiciones de acoplamiento, que se expresan a continuación en su forma adimensional:

$$\left. \frac{d\delta_1}{d\chi_1} \right|_{\chi_1=0} = \frac{1}{\gamma\mu(1 - \cos\theta)} \left. \frac{d\delta_2}{d\theta} \right|_{\theta=\pi/2} \quad (31)$$

$$\frac{1}{\gamma\mu(1 - \cos\theta)} \left. \frac{d\delta_2}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_L} = \left. \frac{d\delta_3}{d\chi_3} \right|_{\chi_3=k_3 L} \quad (32)$$

De las Ecs. (31) y (32), se deriva un sistema de dos ecuaciones con dos constantes desconocidas, que son β_R y β_T . La solución del sistema de ecuaciones viene dada por las siguientes fórmulas:

$$\beta_R = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1 + (\gamma\mu)^2 + (b_1 + a_0)\gamma\mu i}{a_0 b_1 - a_1 b_0 + (\gamma\mu)^2 + (b_1 - a_0)\gamma\mu i} \quad (33)$$

$$\beta_T = \frac{2b_0\gamma\mu}{(a_0 - b_1)\gamma\mu + (\gamma^2\mu^2 + a_0 b_1 - a_1 b_0)i} e^{-ik_3 L} \quad (34)$$

donde

$$a_0 = \sum_{n=1}^N \frac{f_{n,N-1}(a)^{n-1}}{(n-1)!} \quad a_1 = \sum_{n=1}^N \frac{f_{n,N}(a)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (35)$$

$$b_0 = \sum_{n=1}^N \frac{f_{n,N-1}(b)^{n-1}}{(n-1)!} \quad b_1 = \sum_{n=1}^N \frac{f_{n,N}(b)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (36)$$

con $a = -\pi/2$ y $b = \pi/2$.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

La principal hipótesis hecha en la ecuación de la pendiente suave y la ecuación modificada de la pendiente suave, es que la profundidad del agua varía lentamente, la cual se denomina “suposición de profundidad localmente constante”. En un sentido físico las ondas tienen tiempo para adaptarse a una nueva profundidad a medida que se propagan, esto ocurre suavemente. Sin embargo, implica que a medida que cambia el oleaje de una profundidad a otra ligeramente diferente, la velocidad de fase C cambia, y por lo tanto, todas las propiedades de la onda también cambian. De tal manera, que se proporciona un parámetro de pendiente S , el cual representa la variación en la profundidad del agua h sobre una longitud de onda λ .

Considerando un valor del parámetro de pendiente $S = 4$, se proponen los siguientes valores físicos: la profundidad en la región R_1 toma el valor de $h_1 = 0.9\text{m}$, la profundidad h_3 , se calcula con la Ec. (5), se proponen cinco

radios para el rompeolas cicloidal $r(= 0.09,0.18,0.27,0.36,0.45)\text{m}$ y los números de onda en la región R_1 son $k_1(= 0.174,0.349,0.523,0.698,0.872)\text{m}^{-1}$. A partir de los datos anteriores, se obtienen los valores del parámetro geométrico $\mu(= 0.10,0.20,0.30,0.40,0.50)$ y el parámetro cinemático $\gamma(= 0.157,0.314,0.471,0.628,0.785)$, los cuales proporcionan información de la Ec. (18).

Comparación del modelo matemático presente con la solución de Medina-Rodríguez *et al.* [8]

Se compara el modelo matemático presente con la solución analítica para la superficie libre adimensional, $\delta_2(\theta)$ obtenida por Medina-Rodríguez *et al.* [8]. Esta última se determinó para el límite de ondas largas lineales, la cual se selecciona con base al parámetro de Ursell U_r , que está dado por $U_r = \varepsilon/\mu_r^2$, donde $\varepsilon = A_1/h$ y $\mu_r = h/\lambda$, esta teoría debe satisfacer $U_r \ll 1$.

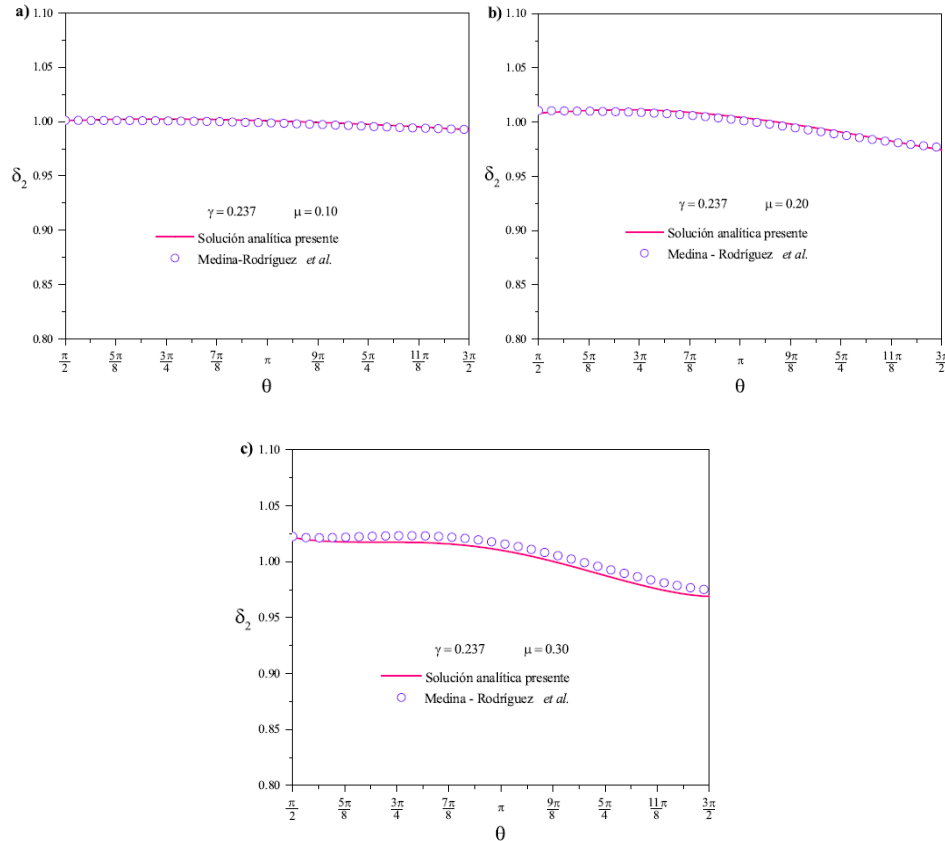


Figura 3. Elevación de la superficie libre adimensional $\delta_2(\theta)$ en función de la variable θ , para un valor constante del parámetro $\gamma = 0.237$ y valores diferentes del parámetro μ : **a)** $\mu = 0.10$, **b)** $\mu = 0.20$ y **c)** $\mu = 0.30$. La solución actual está representada por líneas continuas y la teoría de Medina-Rodríguez *et al.* [8] se especifica por símbolos.

Considerando valores físicos de las profundidades $h_1 = h_3 = 0.9\text{m}$ y del radio $r(= 0.09,0.18,0.27)\text{m}$, el máximo número de onda en el límite de ondas largas en la región R_1 es $k_1 = 0.264\text{m}^{-1}$. Con los valores anteriores se proponen los siguientes parámetros adimensionales: $\gamma = 0.237$ y $\mu(= 0.10,0.20,0.30)$. Como se aprecia en la Fig. 3, la solución analítica presente reproduce correctamente el límite de ondas largas lineales.

Rompeolas cicloidal

El rompeolas cicloidal está limitado en el intervalo $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$ con $h_1 = h_3$. En la Fig. 4 se muestra la variación de la superficie libre adimensional, δ_2 , generada por la interacción del oleaje con un rompeolas cicloidal. Para estos resultados, se consideran valores del parámetro **a)** $\mu = 0.10$ y **b)** $\mu = 0.30$ y valores diferentes de $\gamma(= 0.157,0.314,0.471,0.628,0.785)$. Cuando los parámetros μ y γ , tienden a tomar valores pequeños, esto para ambas

gráficas, la superficie libre no muestra una perturbación muy notable, en particular, para valores de $\mu = 0.30$ y $\gamma = 0.157$, la superficie libre $\delta_2 \rightarrow 1$. Por el contrario, la magnitud de la superficie libre crece conforme los valores de γ se incrementan; sin embargo, para valores cuando $\gamma \rightarrow 1$ y $\theta \rightarrow 3\pi/2$, la superficie libre δ_2 decrece significativamente. Lo anterior, físicamente implica que para $\lambda \sim O(L)$, recordando que L es la longitud horizontal del rompeolas, el rompeolas cicloidal tiene una influencia significativa en la altura de la superficie libre del agua.

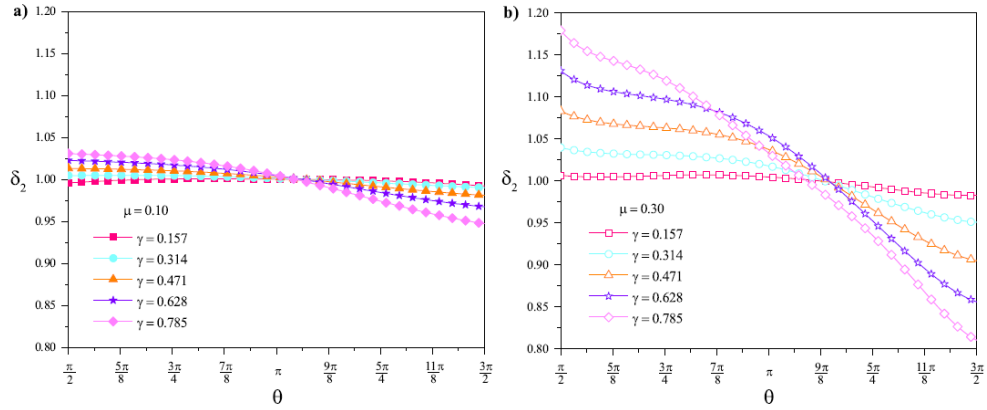


Figura 4. Elevación de la superficie libre adimensional δ_2 en función del eje adimensional θ para diferentes valores del parámetro cinemático $\gamma(= 0.157,0.314,0.471,0.628,0.785)$ y valores constantes del parámetro geométrico: **a)** $\mu = 0.10$ y **b)** $\mu = 0.30$.

En la Fig. 5 se muestran los coeficientes de reflexión y transmisión, R y T respectivamente, que se obtienen en términos del parámetro de profundidad μ , para diferentes valores de $\gamma(= 0.157,0.237,0.314,0.471,0.628,0.785)$. Los incrementos pequeños en la relación de profundidad μ , generan grandes aumentos en las magnitudes de los coeficientes de reflexión, Fig. 5a), los resultados indican que para los valores de $\gamma(= 0.628,0.785)$ y $\mu > 0.35$ la estructura es altamente reflejante. Por el contrario, los coeficientes de transmisión T , Fig. 5b), tienen un comportamiento opuesto a los coeficientes de reflexión R . Para $\mu \rightarrow 0.10$ el coeficiente $T \rightarrow 1$, y después disminuye lentamente hasta $\mu \rightarrow 0.25$. Para valores de $\mu > 0.25$ las magnitudes de T presentan grandes disminuciones y $T \rightarrow 0$. El ejemplo más significativo para el comportamiento de los coeficientes R y T , se presenta cuando se considera el valor más grande de $\gamma = 0.785$ y el parámetro $\mu \rightarrow 0.5$.

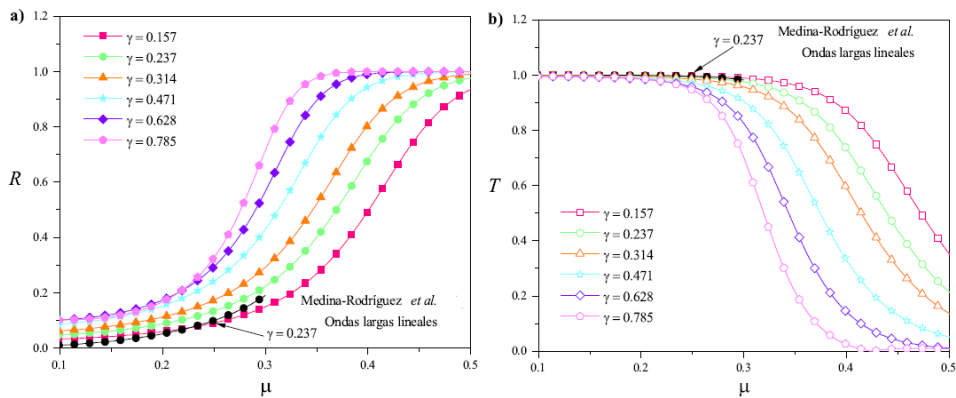


Figura 5. Coeficientes de reflexión y transmisión en función del parámetro geométrico μ para diferentes valores del parámetro cinemático $\gamma(= 0.157,0.237,0.314,0.471,0.638,0.785)$.

La Fig. 6 también muestra los coeficientes de reflexión y transmisión, pero en función del parámetro adimensional γ para diferentes valores de la relación de profundidad $\mu(= 0.05,0.10,0.15,0.20,0.25,0.30,0.40,0.50)$. En la Fig. 6a), las curvas de los coeficientes de reflexión para ciertos valores altos del parámetro de profundidad μ son altamente reflejantes, cuando $\gamma \rightarrow 0.8$, lo que significa que $R \rightarrow 1$. Sin embargo, para valores pequeños de μ , se observa que la reflexión no va cambiando significativamente, pero desde $\mu \geq 0.25$, los cambios de magnitud en los coeficientes R son más notables. También es importante mencionar que los coeficientes de reflexión R cuando $\gamma \rightarrow 1$ y para valores pequeños de μ decrecen significativamente hasta alcanzar la condición de reflexión cero, lo cual significa que para ciertos valores de γ y μ , la

estructura es transparente. Ahora bien, cuando $\gamma \rightarrow 0.1$, los coeficientes de transmisión son $T \rightarrow 1$, esto para el caso de $\mu \leq 0.30$, Fig. 6b). Las magnitudes de los coeficientes de transmisión van disminuyendo rápidamente, hasta alcanzar un valor $T \rightarrow 0$, cuando $\gamma \rightarrow 0.8$, tomando en cuenta que $\mu \geq 0.40$.

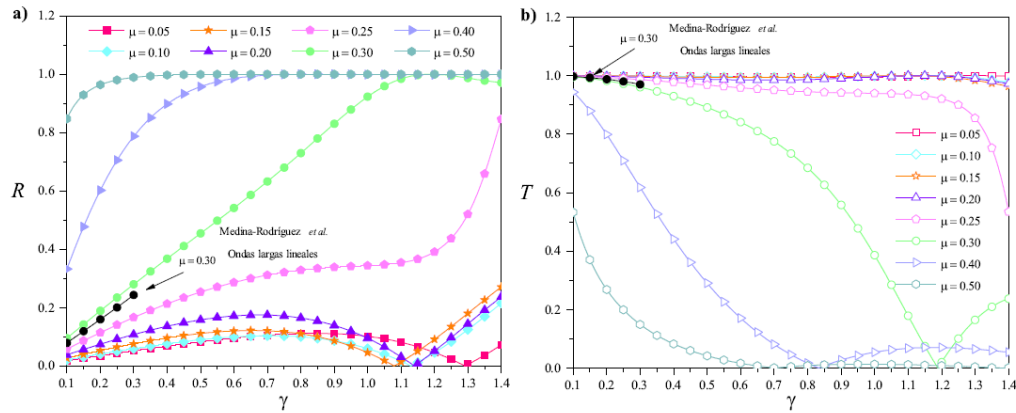


Figura 6. Coeficientes de reflexión y transmisión en función del parámetro cinemático γ para diferentes valores del parámetro geométrico μ ($\mu = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.40, 0.50$).

En las Figs. 5 y 6, se incluye una comparación de los coeficientes de reflexión y transmisión calculados con la presente solución analítica y los resultados obtenidos por Medina-Rodríguez *et al.* [8]. Se consideró un valor de $\gamma = 0.237$, Figs. 5a) y 5b) y un valor de $\mu = 0.30$, Figs. 6a) y 6b). En ambas figuras los coeficientes de transmisión son prácticamente iguales, en cambio, para los coeficientes de reflexión, se nota una ligera diferencia debido a que la ecuación modificada de la pendiente suave es más precisa y tiene un mayor margen de aplicación que la teoría lineal de ondas largas, es importante mencionar que la teoría lineal de ondas largas queda limitada para valores máximos del parámetro cinemático $\gamma = 0.237$ y para el parámetro geométrico $\mu = 0.30$, en cambio, para la ecuación modificada de la pendiente suave los valores que tiene los parámetros cinemático y geométrico son $\gamma \sim O(1)$ y $\mu < 1$, respectivamente, sin embargo, muestran un comportamiento similar.

CONCLUSIONES

Con base en la ecuación modificada de la pendiente suave, en este trabajo se resolvió un modelo matemático que describe la hidrodinámica inducida por la interacción del oleaje con un rompeolas sumergido, cuya sección transversal obedece a una transición geométrica cicloidal. Debido a la complejidad de los coeficientes de variables de la ecuación de gobierno, se utilizaron los polinomios de Taylor para obtener una solución analítica aproximada y así modelar la altura de la superficie libre del oleaje. Se obtuvieron fórmulas de los coeficientes de reflexión R y transmisión T del oleaje. Con la finalidad de validar la solución analítica, ésta se comparó con la solución analítica aproximada por Medina-Rodríguez *et al.* [8], la cual es válida para el límite de ondas largas lineales, la solución analítica que se propone, tiene un alcance mayor a la propuesta por Medina-Rodríguez *et al.* [8]; debido a que la solución actual puede aplicarse a un rango mayor de longitudes de onda, las cuales pueden tomar valores desde ondas cortas hasta largas.

La solución analítica que se desarrolló en este trabajo, tiene un rango de aplicación ingenieril más grande que las reportadas en la literatura especializada. El modelo matemático que se propone, puede aplicarse desde aguas intermedias hasta flujos someros. Los resultados obtenidos muestran que el rompeolas sumergido cicloidal es una buena alternativa para la reflexión del oleaje.

REFERENCIAS

- [1] H.A. Shalid and A. Ghazali, Layout and desing of breakwater at zawia port, *Technical report*, University of Tripoli Faculty of Engineering Department of Civil Engineering.
- [2] R.L. Wiegel, *Oceanographical Engineering*. Dover Publications Inc., 1964.
- [3] E.C. Lee and R.S. Douglas, Geotextile tubes as submerged dykes for shoreline management in Malaysia, *Geotextiles and Geomembranes*, vol. 30, pp. 8-15, 2012.

- [4] E.C. Shin and Y.I. Oh, Coastal erosion prevention by geotextile tube technology, *Geotextiles and Geomembranes*, vol. 25, pp. 264-277, 2007.
- [5] C. Sheehan and J. Harrington, An environmental and economic analysis for geotube coastal structures retaining dredge material, *Resources, Conservation and Recycling*, vol. 61, pp. 91-102, 2012.
- [6] I.E. Alvarez, R. Rubio and H. Ricalde, Beach restoration with geotextile tubes as submerged breakwaters in Yucatán, México, *Geotextiles and Geomembranes*, vol. 25, pp. 233-241, 2007.
- [7] W. Guo, J. Chu and S. Yan, Effect of subgrade soil stiffness on the design of geosynthetic tube, *Geotextiles and Geomembranes*, vol. 29, pp. 277-284, 2011.
- [8] A. Medina-Rodríguez, E. Bautista, F. Méndez and O. Bautista, Propagation of linear long water waves on a cycloidal breakwater, *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 100, pp. 187-210, 2016.
- [9] H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1932.
- [10] G. Kreisel, Surface waves, *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 7, pp. 21-44, 1949.
- [11] L.K. Forbes, On the wave resistance of a submerged semi-elliptical body, *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 15, pp. 287-298, 1981.
- [12] C. Eckart, Surface waves on water of variable depth, wave report no. 100, *Technical report*, Marine Physical Laboratory of the Scripps Institution of Oceanography, University of California, 1951.
- [13] C. Eckart, The propagation of gravity waves from deep to shallow water, *National Bureau of Standards*, vol. 20, pp. 165-173, 1952.
- [14] J.C.W. Berkhoff, Computation of combined refraction diffraction, In: *Proceedings of the 13th International Conference on Coastal Engineering ASCE*, Vancouver, Canada, pp. 471-490, 1972.
- [15] J.C.W. Berkhoff, Mathematical models for simple harmonic linear water waves: Wave diffraction and refraction, PhD thesis, Delft Technical University, Netherlands, 1976.
- [16] N. Booij, A note on the accuracy of the mild-slope equation, *Coastal Engineering*, vol. 7, pp. 191-203, 1983.
- [17] J.T. Kirby, A general wave equation for waves over rippled beds, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 162, pp. 171-186, 1986.
- [18] A.G. Davies and A.D. Heathershaw, Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 144, pp. 419-443, 1984.
- [19] P.G. Chamberlain and D. Porter, The modified mild-slope equation, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 291, pp. 393-407, 1995.
- [20] D. Porter and D.J. Staziker, Extensions of the mild-slope equation, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 300, pp. 367-382, 1995.
- [21] G.A. Athanassoulis and K.A. Belibassakis, A consistent coupled-mode theory for the propagation of small-amplitude water waves over variable bathymetry regions, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 1999, pp. 275-301, 1999.
- [22] Y. Toledo and Y. Agnon, A scalar form of the complementary mild-slope equation, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 656, pp. 407-416, 2010.
- [23] J. Yang, Exact Analytic Solutions to the Mild-slope Equation and Modified Mild-slope Equation for Wave Reflection by One-dimensional Piecewise Smooth Topographies, PhD thesis, Guangxi University for Nationalities, China, 2011.
- [24] H.-W. Liu, J. Yang and P. Lin, An analytic solution to the modified mild-slope equation for wave propagation over one-dimensional piecewise smooth topographies, *Wave Motion*, vol. 49, pp. 445-460, 2012.
- [25] S.-S. Hsiao, C.-M. Chang and C.-C. Wen, An analytical solution to the modified mild-slope equation for waves propagating around a circular conical island, *Journal of Marine Science and Technology*, vol. 18, pp. 520-529, 2010.
- [26] H.-W. Liu, D.-J. Fu and X.-L. Sun, Analytic solution to the modified mild-slope equation for reflection by a rectangular breakwater with scour trenches, *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 139, pp. 39-58, 2013.
- [27] H.-W. Liu and J.-J. Xie, The series solution to the modified mild-slope equation for wave scattering by homma islands, *Wave Motion*, vol. 50, pp. 869-884, 2013.
- [28] K.T. Tang, *Mathematical Methods For Engineers and Scientists*, volume 3.
- [29] I.A. Svendsen, *Introduction to Nearshore Hydrodynamics*, vol. 24.

NOMENCLATURA

Letras latinas

A_I	Amplitud del oleaje incidente, m.
A_R	Amplitud del oleaje reflejado, m.

A_T	Amplitud del oleaje transmitido, m.
C	Velocidad de fase, m/s.
C_g	Velocidad de grupo, m/s.
g	Aceleración de la gravedad, m/s ² .
h	Profundidad del agua, m.
\hat{h}	Profundidad del agua adimensional.
i	Número imaginario, $\sqrt{-1}$.
k	Número de onda, m ⁻¹ .
L	Longitud de la región R_2 , m.
L_y	Longitud normal al plano $x - z$, m.
r	Radio del círculo generador del arco cicloidal, m.
R	Coefficiente de reflexión.
S	Parámetro de pendiente.
t	Tiempo, s.
T	Coefficiente de transmisión.
T_o	Período del oleaje, s.
x	Eje de coordenada horizontal.
y	Eje de coordenada lateral.
z	Eje de coordenada vertical.

Símbolos griegos

β_R	Constante compleja del oleaje reflejado.
β_T	Constante compleja del oleaje transmitido.
χ	Eje coordenado longitudinal adimensional.
η	Amplitud de la superficie libre en la región R_2 , m.
$\bar{\eta}$	Amplitud de la superficie libre en la región R_1 , m.
$\tilde{\eta}$	Amplitud de la superficie libre en la región R_3 , m.
δ_1	Amplitud de la superficie libre adimensional en la región R_1 .
δ_2	Amplitud de la superficie libre adimensional en la región R_2 .
δ_3	Amplitud de la superficie libre adimensional en la región R_3 .
γ	Parámetro cinemático adimensional.
κ	Número de onda adimensional.
λ	Longitud de onda, m.
μ	Parámetro geométrico adimensional.
ω	Frecuencia del oleaje, s ⁻¹ .
θ	Ángulo del cicloide, rad.
θ_L	Valor máximo del ángulo del cicloide, rad.

Subíndices

I, R, T	Incidente, reflejado y transmitido, respectivamente.
$+, -$	Región derecha e izquierda, respectivamente.